

第3讲 正方形

一、菱形的判定

菱形的判定

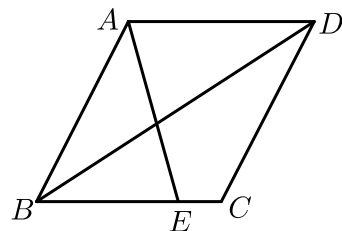
1、定义法：有一组_____的_____是菱形. (边判定)
书写：

2、_____的_____是菱形. (对角线判定)
书写：

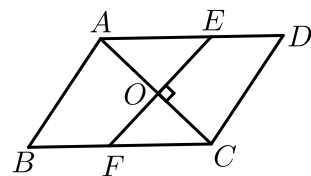
3、_____条边_____的_____是菱形. (边判定)
书写：

例题

1. 从下列条件中选择一个条件添加后，还不能判定平行四边形 $ABCD$ 是菱形，则这个条件是（ ）.
A. $AC \perp BD$ B. $AD = CD$ C. $AB = BC$ D. $AC = BD$
2. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， E 为 BC 边上的一点，连结 AE 、 BD 且 $AE = AB$. 若 $\angle AEB = 2\angle ADB$ ，求证：四边形 $ABCD$ 是菱形.



3. 在平行四边形 $ABCD$ 中， O 是对角线 AC 的中点，过点 O 作 AC 的垂线与 AD 、 BC 分别交于点 E 、 F .

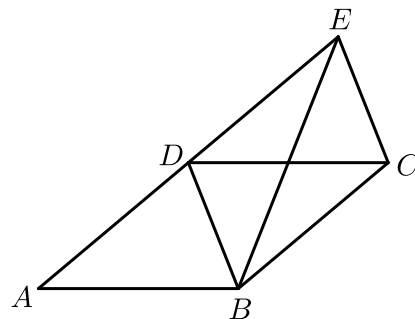


(1) 求证： $AE = CF$.

(2) 连接 AF 、 CE ，判断四边形 $AFCE$ 的形状，并说明理由 .

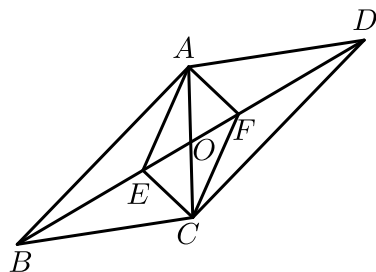
练习

4. 如图，四边形 $ABCD$ 为平行四边形，延长 AD 到 E ，使 $DE = AD$ ，连接 EB ， EC ， DB ，下列条件中，不能使四边形 $DBCE$ 成为菱形的是 () .



- A. $AB = BE$ B. $BE \perp DC$ C. $\angle ABE = 90^\circ$ D. BE 平分 $\angle DBC$

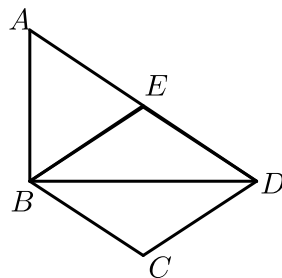
5. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC ， BD 相交于点 O ，点 E ， F 在 BD 上，且 $BE = DF$.



(1) 求证： $\triangle ABE \cong \triangle CDF$.

(2) 在不添加辅助线的情况下，请你补充一个条件，使得四边形 $AECF$ 是菱形，并给予证明 .

6. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， BD 为一条对角线， $AD \parallel BC$ ， $AD = 2BC$ ， $\angle ABD = 90^\circ$ ， E 为 AD 的中点，连接 BE .

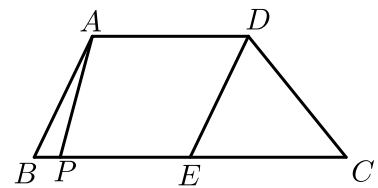


(1) 求证：四边形 $BCDE$ 为菱形 .

(2) 连接 AC ，若 AC 平分 $\angle BAD$ ， $BC = 1$ ，求 AC 的长 .

例题

7. 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， E 是 BC 的中点， $AD = 5$ ， $BC = 12$ ， $CD = 4\sqrt{2}$ ， $\angle C = 45^\circ$ ，点 P 是 BC 边上一动点，设 PB 的长为 x 。



- (1) 当 x 的值为_____时，以点 P 、 A 、 D 、 E 为顶点的四边形为平行四边形。
- (2) 点 P 在 BC 边上运动的过程中，以点 P 、 A 、 D 、 E 为顶点的四边形能否构成菱形？试说明理由。

练习

8. 已知，矩形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = 4\text{cm}$ ， $BC = 8\text{cm}$ ， AC 的垂直平分线 EF 分别交 AD ， BC 于点 E 、 F ，垂足为 O 。

- (1) 如图1，连接 AF ， CE 。求证：四边形 $AFCE$ 为菱形。

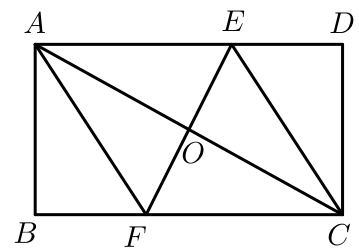


图1

- (2) 如图1，求 AF 的长。
- (3) 如图2，动点 P 、 Q 分别从 A 、 C 两点同时出发，沿 $\triangle AFB$ 和 $\triangle CDE$ 各边匀速运动一周，即点 P 自 $A \rightarrow F \rightarrow B \rightarrow A$ 停止，点 Q 自 $C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow C$ 停止。在运动过程中，点 P 的速度为每秒 1cm 。点 Q 的速度为每秒 0.8cm 。设运动时间为 t 秒，若当 A 、 P 、 C 、 Q 四点为顶点的四边形是平行四边形时，直接写出 t 的值。

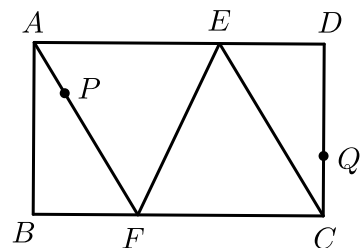
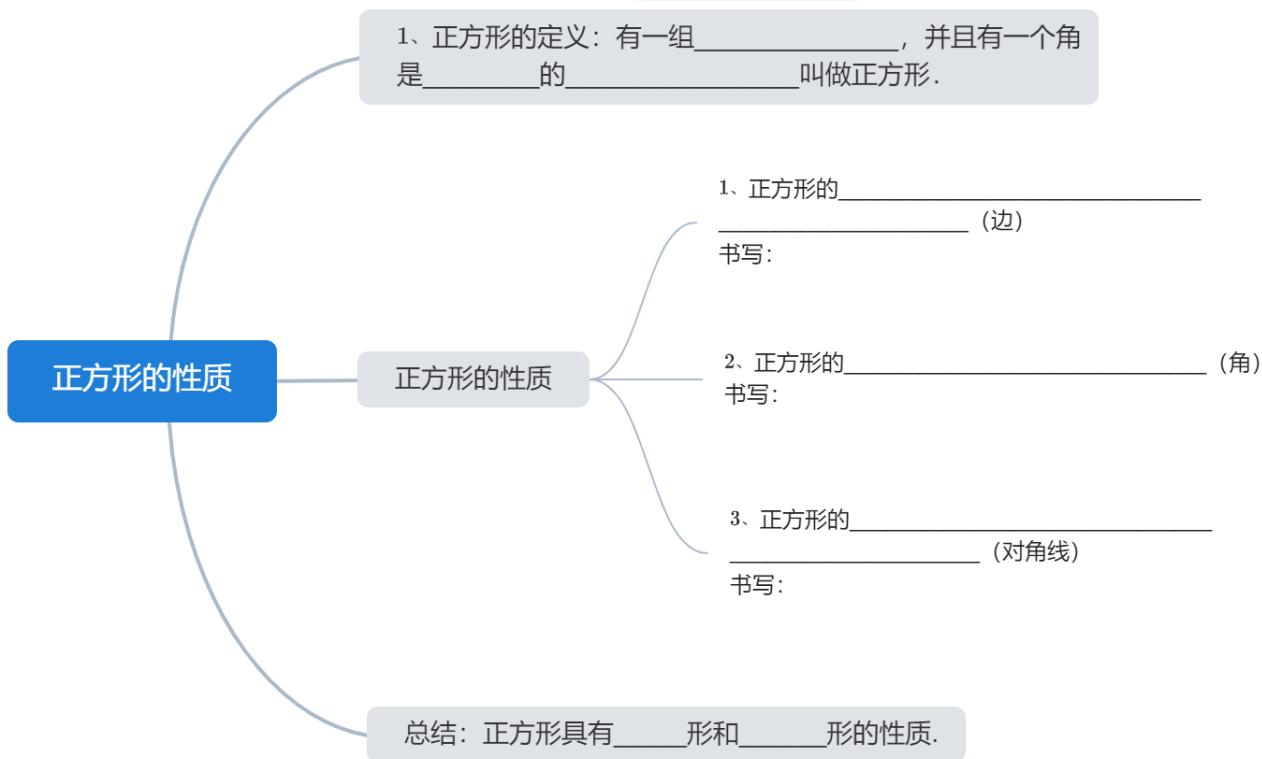


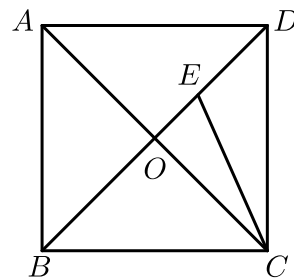
图2

二、正方形的性质

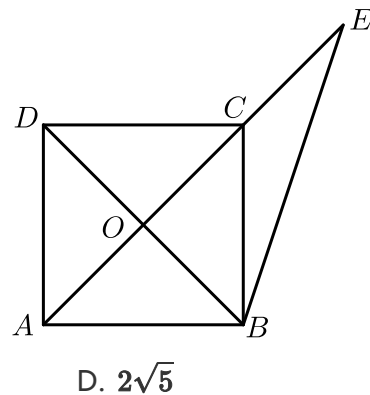


例题

9. 正方形面积为36, 则对角线的长为 ().
 A. 6 B. $6\sqrt{2}$ C. 9 D. $9\sqrt{2}$
10. 如图, 正方形 $ABCD$ 的两条对角线 AC , BD 相交于点 O , 点 E 在 BD 上, 且 $BE = CD$, 则 $\angle BEC$ 的度数为 ().



- A. 22.5° B. 60° C. 67.5° D. 75°
11. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 $\sqrt{2}$, 对角线 AC , BD 交于点 O , E 是 AC 延长线上一点, 且 $CE = CO$, 则 BE 的长度为 ().



- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ C. $\sqrt{5}$

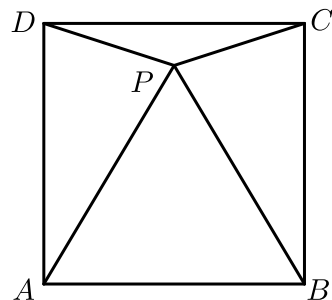
D. $2\sqrt{5}$

练习

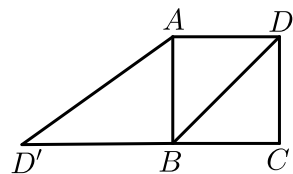
12. 正方形的一条对角线长为4，则这个正方形的面积是（ ）。

- A. 8 B. $4\sqrt{2}$ C. $8\sqrt{2}$ D. 16

13. 如图，已知P是正方形ABCD内的一点，且 $\triangle ABP$ 为等边三角形，那么 $\angle DCP =$ _____。

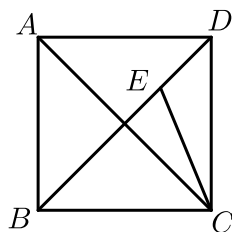


14. 如图，已知正方形ABCD的边长为2，如果将对角线BD绕着点B旋转后，点D落在CB延长线上的D'处，那么AD'的长为（ ）。



- A. $2\sqrt{3}$ B. $\sqrt{10}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $\sqrt{7}$

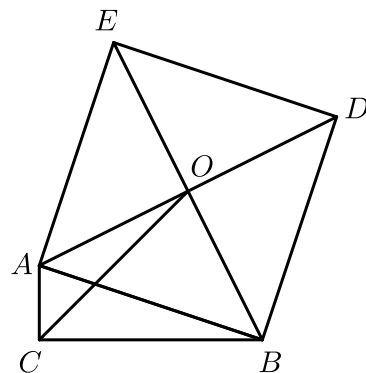
15. 如图，已知正方形ABCD边长为1，连接AC，BD，CE平分 $\angle ACD$ 交BD于点E，则DE长为（ ）。



- A. $2\sqrt{2} - 2$ B. $\sqrt{3} - 1$ C. $\sqrt{2} - 1$ D. $2 - \sqrt{2}$

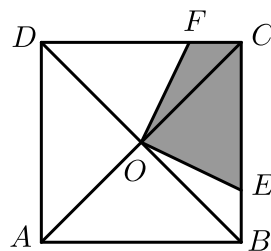
例题

16. 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，以斜边 AB 为边向外作正方形 $ABDE$ ，且正方形对角线交于点 O ，连接 OC ，已知 $AC = 3$ ， $OC = 6\sqrt{2}$ ，则另一直角边 BC 的长为 _____ 。



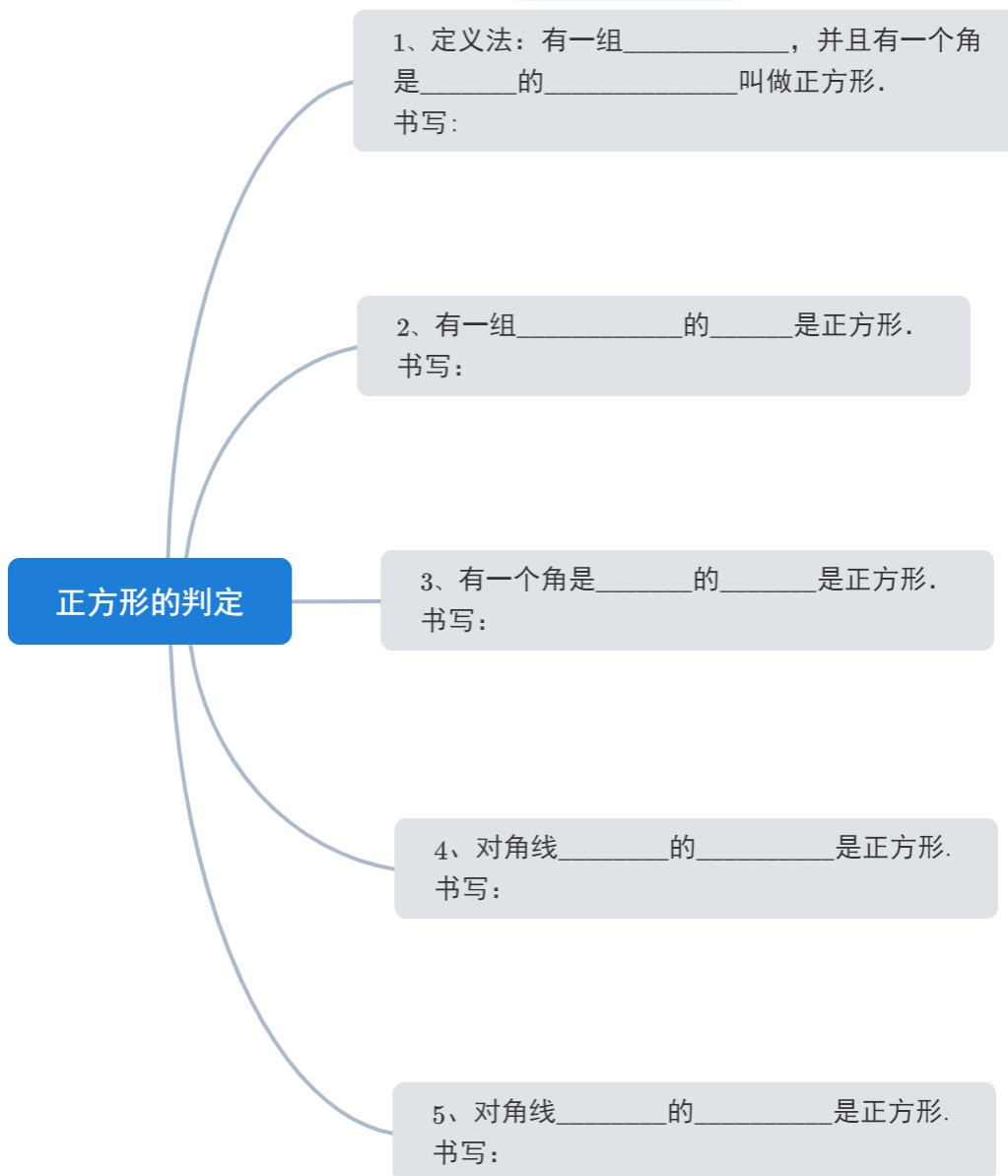
练习

17. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为2，对角线 AC 、 BD 交于点 O ， E 是 BC 边上的一个动点， $OF \perp OE$ 交 CD 于点 F ，则四边形 $OECF$ 的面积是（ ）。



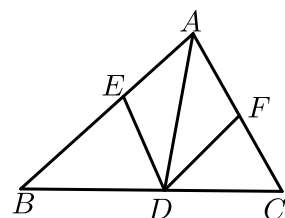
- A. 2 B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

三、正方形的判定



例题

18. 在四边形 $ABCD$ 中， O 是对角线的交点，下列条件能判定这个四边形是正方形的是（ ）
- A. $AC = BD$, $AB \parallel CD$, $AB = CD$ B. $AD \parallel BC$, $\angle A = \angle C$
C. $AO = BO = CO = DO$, $AC \perp BD$ D. $AO = CO$, $BO = DO$, $AB = BC$
19. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 、 F 分别在边 AB 、 BC 、 CA 上，且 $DE \parallel CA$ ， $DF \parallel BA$ 。下列结论：①四边形 $AEDF$ 是平行四边形；②如果 $\angle BAC = 90^\circ$ ，那么四边形 $AEDF$ 是矩形；③如果 AD 平分 $\angle BAC$ ，那么四边形 $AEDF$ 是菱形；④如果 $\angle BAC = 90^\circ$ ， AD 平分 $\angle BAC$ ，那么四边形 $AEDF$ 是正方形，你认为正确的是（ ）。



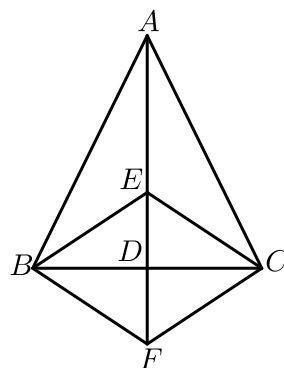
A. ①②③④

B. ①②③

C. ①②④

D. ②③④

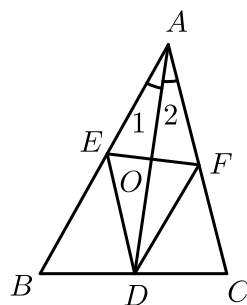
20. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， AD 是 BC 边上的中线，点 E 是 AD 上一点，过点 B 作 $BF \parallel EC$ ，交 AD 的延长线于点 F ，连接 BE ， CF 。



(1) 求证： $\triangle BDF \cong \triangle CDE$ 。

(2) 当 ED 与 BC 满足什么数量关系时，四边形 $BECF$ 是正方形？请说明理由。

21. 如图， AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，线段 AD 的垂直平分线分别交 AB 和 AC 于点 E 、 F ，连接 DE 、 DF 。



(1) 试判定四边形 $AEDF$ 的形状，并证明你的结论。

(2) 若 $AE = 5$ ， $AD = 8$ ，求 EF 的长。

(3) 直接写出 $\triangle ABC$ 满足什么条件时，四边形 $AEDF$ 是正方形？

练习

22. 下列命题正确的是()。

A. 有一组邻边相等的平行四边形是正方形

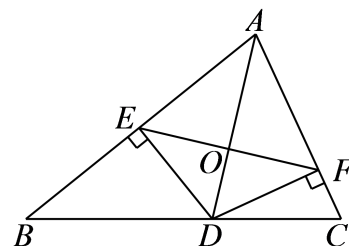
B. 有一个角是直角的平行四边形是正方形

C. 对角线相等的菱形是正方形

D. 对角线互相平分的矩形是正方形

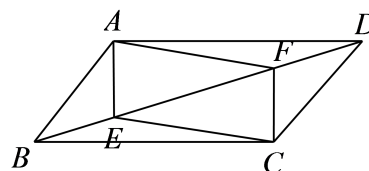
23. 如图， AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线， DE ， DF 分别是 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的高，得到下面四个结论：

- ① $OA = OD$ ；② $AD \perp EF$ ；③当 $\angle A = 90^\circ$ 时，四边形 $AEDF$ 是正方形；④ $AE^2 + DF^2 = AF^2 + DE^2$ ．其中正确的是（ ）．



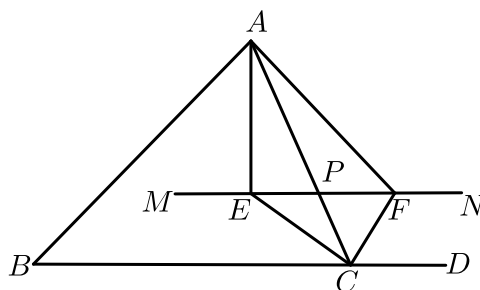
- A. ②③ B. ②④ C. ②③④ D. ①③④

24. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， E 、 F 为对角线 BD 上两点， $BE = DF$ ，连接 AE 、 EC 、 CF 、 FA ．



- (1) 求证：四边形 $AECF$ 为平行四边形．
 (2) 若 $AB = AD$ ，求证：四边形 $AECF$ 为菱形．
 (3) 在(2)的条件下，连接 AC 交 BD 于点 O ，若 $AB : BE : AO = 5 : 1 : 3$ ．求证：四边形 $AECF$ 为正方形．

25. 如图， $\triangle ABC$ 中， $MN \parallel BD$ 交 AC 于 P ， $\angle ACB$ 、 $\angle ACD$ 的平分线分别交 MN 于 E 、 F ．



- (1) 求证： $PE = PF$ ．
 (2) 当 MN 与 AC 的交点 P 在什么位置时，四边形 $AECF$ 是矩形，说明理由．
 (3) 在(2)的条件下，当 $\triangle ABC$ 满足什么条件时，四边形 $AECF$ 是正方形．（不需要证明）